

Lemme: Soit $n \geq 5$.

Alors les 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$.

Soit $\gamma = (x_1, x_2, x_3)$ et $\gamma' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ deux 3-cycles.

Soit $\sigma \in S_n$ tq $\sigma(x_k) = x'_k$ pour $k=1,2,3$. Alors $\gamma' = \sigma \gamma \sigma^{-1}$.

On a alors:

- si $\sigma \in \mathcal{A}_n$, c'est terminé

- si $\sigma \notin \mathcal{A}_n$, on prend $x_n, x_5 \in [1, n] \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$, ce qui est possible car $n \geq 5$.

On considère $\sigma' = (x_n, x_5)\sigma \in \mathcal{A}_n$. Alors $\gamma' = \sigma' \gamma \sigma'^{-1}$.

Donc γ et γ' sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$.

Théorème: Soit $n \geq 5$.

Alors $\mathcal{A}_n$ est simple.

Soit $H \triangleleft \mathcal{A}_n$ et $H \neq \{\text{id}\}$. Tq $H = \mathcal{A}_n$. Il suffit de montrer que H contient un 3-cycle,

il les contient alors tous d'après le lemme, et $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles; vrai pour $n \geq 3$

Soit $\sigma \in H \setminus \{\text{id}\}$ et $a \in [1, n]$ tq $b := \sigma(a) \neq a$. Soit $c \notin \{a, b, \sigma(b)\}$ et $\gamma := (a, b, c) \in \mathcal{A}_n$.

Soit $\sigma' := \sigma \gamma \sigma^{-1} \gamma^{-1} \in S_n$. Alors $\sigma' \in H$ car $H \triangleleft \mathcal{A}_n$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } \sigma' &= (\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)) (b, a, c) \\ &= (b, \sigma(b), \sigma(c)) (b, a, c) \end{aligned}$$

Ainsi $\text{supp}(\sigma') \subset \{a, b, c, \sigma(b), \sigma(c)\}$ et $\sigma' \neq \text{id}$ car $\sigma'(c) = \sigma(b) \neq c$.

Puisque $\sigma' \in H \subset \mathcal{A}_n$ et $\sigma' \neq \text{id}$, on a 3 cas:

- σ' est un cycle: c'est terminé

- σ' est une bi-transposition: $\sigma' = (x_1, x_2)(x_3, x_4)$. Soit $x_5 \notin \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, possible car $n \geq 5$.

Soit $\tau := (x_1, x_2, x_5) \in \mathcal{A}_n$. Alors $\sigma' \tau \sigma'^{-1} \tau^{-1} \in H$ et

$$\begin{aligned} \sigma' \tau \sigma'^{-1} \tau^{-1} &= (\sigma'(x_1), \sigma'(x_2), \sigma'(x_5)) (x_2, x_1, x_5) \\ &= (x_2, x_1, x_5) (x_2, x_1, x_5) \\ &= (x_1, x_2, x_5) \end{aligned}$$

- σ' est un 5-cycle: $\sigma' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Soit $\tau := (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A}_n$.

Alors $\sigma' \tau \sigma'^{-1} \tau^{-1} \in H$ et

$$\begin{aligned} \sigma' \tau \sigma'^{-1} \tau^{-1} &= (x_2, x_3, x_4) (x_2, x_1, x_3) \\ &= (x_1, x_4, x_2) \end{aligned}$$

Dans tous les cas, H contient un 3-cycle. Ainsi $H = \mathcal{A}_n$ et $\mathcal{A}_n$ est simple.